

УДК 517.954; 51-74; 519.63

**О. Муль**

(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

**АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ АВТОКОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ В  
ДЕЯКИХ ГЛИБОКОВОДНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ УСТАНОВКАХ**

Розглянемо складні неперервно-дискретні системи транспортних трубопроводів, призначені для піднімання корисних копалин з великих глибин. Основним конструктивним елементом таких глибоководних технологічних установок є трубний став великої довжини  $L$ , пружно закріплений на одному кінці та зв'язаний з платформою значної маси  $M$  на іншому. У таких системах під дією хвиль та нелінійних гідродинамічних сил збуджуються інтенсивні динамічні процеси різної фізичної природи, у тому числі шкідливі автоколивання. Для аналізу можливих автоколивальних процесів використаємо нову математичну модель системи у вигляді дисипативного хвильового рівняння (1) та складних граничних умов (2) – (3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \beta \frac{\partial u}{\partial t}) = 0, \quad (1)$$

$$x = 0: \quad ES \left( \frac{\partial}{\partial x} (u(0, t) + \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial t}) \right) = ku(0, t), \quad (2)$$

$$x = L: \quad M \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial t^2} + ES \frac{\partial}{\partial x} (u(L, t) + \beta \frac{\partial u(L, t)}{\partial t}) = \alpha_1 \frac{\partial u(L, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

де  $u(x, t)$  – позовжне зміщення точок стержня;  $\beta$  – коефіцієнт, що враховує внутрішнє тертя в матеріалі;  $S$  – площа поперечного перерізу стержня;  $E$  – модуль пружності матеріалу конструкції;  $\rho$  – його густина;  $k$  – позовжня жорсткість пружної підвіски;  $a^2 = E/\rho$ ;  $\alpha_1$  – коефіцієнт, який характеризують середовище, що чинить опір.

Нестандартні граничні умови задачі ускладнюють аналітичне визначення її власних значень, тому з цією метою використаємо чисельний метод нормальних фундаментальних систем розв'язків. Для цього спочатку перейдемо до безрозмірних змінних  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{u} = u/L$ ,  $\tau = ta/L$  та безрозмірних параметрів  $\varepsilon_1 = a\beta/L$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_1 L/Ma$ ,  $\mu = \rho SL/M$ ,  $r = kL/ES$ . Оскільки гранична задача є неконсервативною через наявність в її рівнянні руху та граничних умовах непарних похідних по часу, то її власні значення можуть бути комплексними числами, а отже розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{u}(\bar{x}, \tau) = [\bar{u}_1(\bar{x}) + i\bar{u}_2(\bar{x})]e^{(q+i\omega)\tau}, \quad (4)$$

де  $\omega$  – уявна частина власного значення крайової задачі;  $q$  – його дійсна частина.

Введення нових функцій  $\bar{u}_1 = \gamma_1$ ,  $\bar{u}_2 = \gamma_2$ ,  $\bar{u}_1' = \gamma_3$ ,  $\bar{u}_2' = \gamma_4$  зводить задачу до системи диференціальних рівнянь першого порядку у нормальній формі з лінійними граничними умовами. Її розв'язки шукаємо у виді лінійної комбінації розв'язків задач Коші для цієї системи з початковими умовами, рівними 1 та 0, що складають нормальну фундаментальну систему розв'язків. Це дозволяє одержати алгебраїчне рівняння, з якого можна визначити комплексні власні значення граничної задачі та частоти можливих автоколивань, а також проаналізувати вплив параметрів системи на ці частоти та розробити пропозиції по її вдосконаленню.